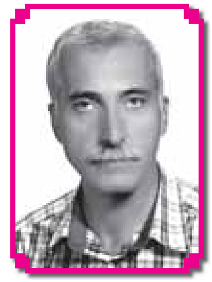
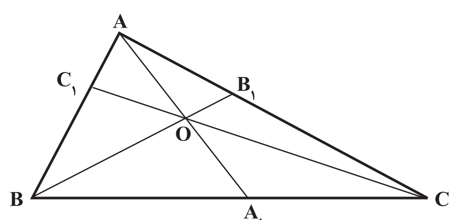


حسین کریمی
دبیر ریاضی تهران

قضیه: اگر O نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث ABC باشد و امتداد AO ضلع BC را در $A_۱$ و امتداد BO ضلع AC را در $B_۱$ و امتداد CO ضلع AB را در $C_۱$ قطع کند، داریم:

$$\frac{AC_۱}{C_۱B}\times\frac{BA_۱}{A_۱C}\times\frac{CB_۱}{B_۱A}=۱$$

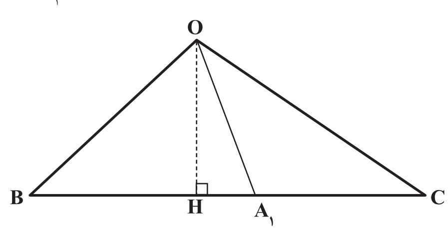


شکل۱

قبل از آنکه به اثبات قضیه بپردازیم، دو مطلب را یادآوری می‌کنیم.

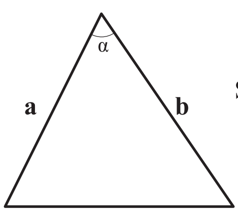
الف) نسبت مساحت‌های دو مثلث با ارتفاع یکسان برابر است با نسبت قاعده‌های دو مثلث:

$$\frac{S_{OBA_۱}}{S_{OCA_۱}}=\frac{BA_۱}{A_۱C}$$



شکل۲

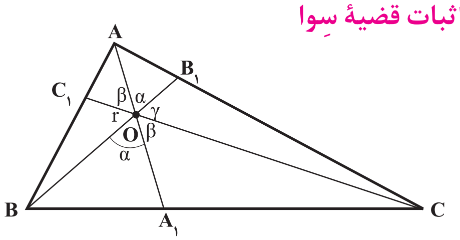
ب) مساحت مثلث با زاویهٔ α برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور به زاویهٔ α در سینوس α:



$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}a.b.\sin\alpha$$

شکل۳

اثبات قضیهٔ سِوا



شکل۴

$$\Delta OBA_۱,\Delta OCA_۱:\frac{BA_۱}{A_۱C}=\frac{S_{OBA_۱}}{S_{OCA_۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}OB.OA_۱.\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}OC.OA_۱.\sin\beta}$$

$$=\frac{OB.\sin\alpha}{OC.\sin\beta}$$

$$\Delta OCB_۱,\Delta OAB_۱:\frac{CB_۱}{B_۱A}=\frac{S_{OCB_۱}}{S_{OAB_۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}OC.OB_۱.\sin\gamma}{\frac{۱}{۲}OA.OB_۱.\sin\alpha}$$

$$=\frac{OC.\sin\gamma}{OA.\sin\alpha}$$

$$\Delta OAC_1, \Delta OBC_1 : \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{OAC_1}}{S_{OBC_1}} = \frac{\frac{1}{2} OA.OC_1.\sin\beta}{\frac{1}{2} OB.OC_1.\sin\gamma}$$

$$= \frac{OA.\sin\beta}{OB.\sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B}$$

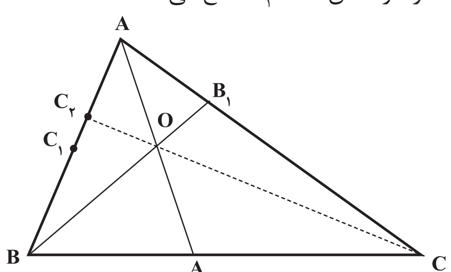
$$= \frac{OB.\sin\alpha}{OC.\sin\beta} \times \frac{OC.\sin\gamma}{OA.\sin\alpha} \times \frac{OA.\sin\beta}{OB.\sin\gamma} = 1 \;\blacksquare$$

عکس قضیهٔ سِوا

اگــر نقاط A_1 روی ضلع BC و B_1 روی ضلع AC و C_1 روی ضلع AB از مثلث ABC چنان واقع باشند که: $1 = \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{AC_1}{C_1B}$، آن‌گاه AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

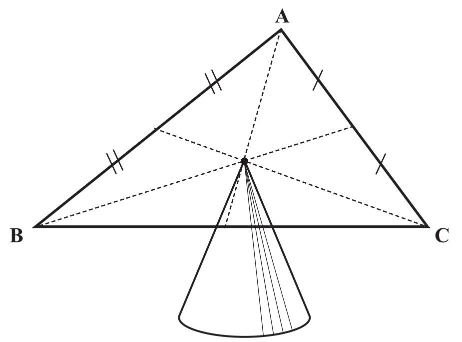
اثبات: نقطـهٔ تلاقـی AA_1 و BB_1 را O می‌نامیم. اگر امتـداد CO از C_1 بگذرد که قضیه اثبات شـده اسـت. فرض کنیم امتـداد CO، AB را در C_2 قطع کند. پس طبق قضیهٔ سوا داریم: $1 = \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_2}{C_2B}$ که از مقایسهٔ آن با فرض قضیهٔ ($1 = \frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A}$) داریم: $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

پـــس: $\frac{AC_2 + C_2B}{C_2B} = \frac{AC_1 + C_1B}{C_1B}$ در نـتـیـــجه: $\frac{AB}{C_2B} = \frac{AB}{C_1B}$ و از آنجا: $C_2B = C_1B$ که نشان می‌دهد دو نقطهٔ C_1 و C_2 برهم منطبق‌اند، لذا امتداد CO، ضلع AB را در همان نقطهٔ C_1 قطع می‌کند.



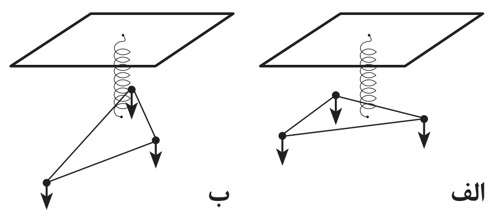
شکل ۵

تذکر: اگــر AA_1 میانــه ($BA_1 = A_1C$) و BB_1 میانه ($CB_1 = B_1A$) و CC_1 میانــه ($AC_1 = C_1B$) باشــند، داریم: $1 = \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B}$ که نشـان می‌دهد سـه میانهٔ مثلث در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و آن نقطه را مرکز ثقل و یا گرانیگاه گویند.



شکل ۶

مسئله: می‌خواهیم یک لوستر سه قسمتی را که هر قسمت آن از یک گوشهٔ صفحهٔ مثلثی آویزان است و جرم هر قسمت، متفاوت با قسمت دیگر است، از سقف آویزان کنیم. نقطهٔ اتصال زنجیر آویز از سقف به مثلث را چنان تعیین کنید تا صفحهٔ مثلث به موازات کف (یا سقف) اتاق قرار گیرد (شکل ۷- الف رخ دهد و شکل ۷- ب رخ ندهد).

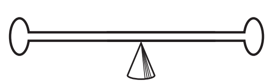


شکل ۷

مقدمه

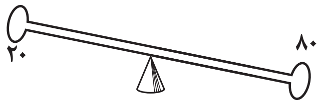
بدیهی است که اگر وزن سه جسم آویزان شده از سه رأس مثلث، یکسان باشد، باید صفحهٔ مثلث را از مرکز ثقل آن (گرانیگاه) یعنی از محل تلاقی سه میانه آویزان کنیم (مانند شکل ۶).

در پارک‌های بازی، الاکلنگ‌های کار گذاشته شده برای دو نفر هم‌وزن ساخته شده‌اند، از این رو تکیه‌گاه را در وسط الاکلنگ قرار می‌دهند (مانند شکل ۸).



شکل ۸

حال اگر قرار باشد پدری با وزن ۸۰ کیلوگرم با پسرش به وزن ۲۰ کیلوگرم، الاکلنگ بازی کنند، در همان ابتدا، اتفاقی رخ می‌دهد که در شکل ۹ می‌بینید و بازی ادامه پیدا نمی‌کند.



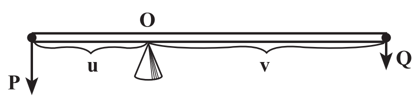
شکل ۹

اما علم مکانیک شکل بازی پدر و پسر را حل کرده است و راه‌حل زیر را ارائه می‌دهد: اگر وزن پدر ۴ برابر وزن پسر است، تکیه‌گاه را طوری قرار دهید که فاصله‌اش تا پسر، ۴ برابر فاصله‌اش تا پدر باشد (مانند شکل ۱۰).

شکل ۱۰

در واقع در مکانیک ثابت می‌شود که نسبت فاصله‌ها برابر با عکس نسبت وزن‌ها است (شکل ۱۱).

$$\frac{u}{v}=\frac{Q}{P}$$

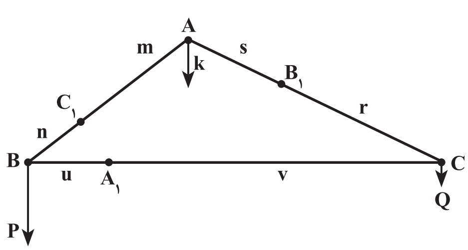


شکل ۱۱

به عبارت دیگر، اگر فاصله‌های نقطهٔ O از وزنه‌های P و Q را با u و v نشان دهیم، ترازمندی تنها هنگامی است که حاصل‌ضرب نیروی P در بازوی u برابر با حاصل‌ضرب نیروی Q در بازوی v باشد؛ یعنی: P.u=Q.v

حال با توجه به مقدمهٔ گفته شده به حل مسئلهٔ لوستر می‌پردازیم که کاربردی از قضیهٔ سوا در مکانیک است.

برای به‌دست آوردن نقطهٔ A_1، محل گرانیگاه پاره‌خط BC، که از B وزنهٔ P و از C وزنهٔ Q آویزان است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



شکل ۱۲

$$\begin{cases} u.P = v.Q \\ u + v = BC \end{cases} \Rightarrow u.P = (BC - u).Q$$

$$\Rightarrow u = \frac{BC.Q}{P+Q}, v = \frac{BC.P}{P+Q}$$

یعنی A_1 به فاصلهٔ $\frac{BC.Q}{P+Q}$ از رأس B، روی BC قرار دارد و همچنین داریم: $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$

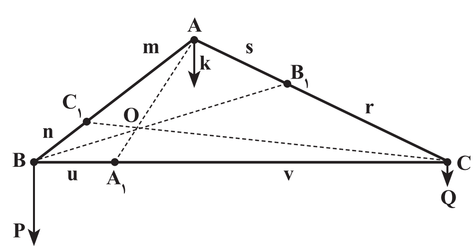
به‌همین ترتیب محل نقطهٔ B_1 را به‌عنوان گرانیگاه پاره‌خط AC که از رأس A وزنهٔ k و از رأس C وزنهٔ Q آویزان است تعیین می‌کنیم و داریم: $\frac{r}{s} = \frac{k}{Q}$.

با مشخص کردن محل نقطهٔ C_1 روی AB به‌عنوان گرانیگاه که در آن از رأس A وزنهٔ k و از رأس B وزنهٔ P آویز است، داریم: $\frac{m}{r} = \frac{P}{k}$.

با توجه به برقراری تساوی $\frac{Q}{P} \times \frac{k}{Q} \times \frac{P}{k} = ۱$ داریم: $\frac{u}{v} \times \frac{r}{s} \times \frac{m}{r} = ۱$.

به استناد عکس قضیه سِوا، همرسی AA_1، BB_1 و CC_1 را داریم که نقطهٔ تلاقی یعنی همان O نقش مرکز ثقل مثلث ABC را خواهد داشت.

توجه داشته باشیم که A_1، B_1 و C_1 وسط‌های اضلاع مثلث نیستند، ولی به‌دلیل متفاوت بودن جرم وزنه‌های آویزان‌شده از A، B و C نقاط A_1، B_1 و C_1 همان نقش تکیه‌گاه الاکلنگ با وزن‌های متفاوت در دو سر را ایفا می‌کنند و به‌همین دلیل، O مرکز ثقل صفحهٔ مثلث لوستر است (شکل ۱۳).

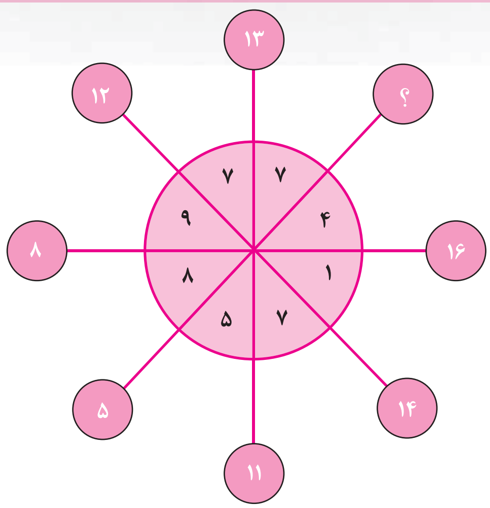


شکل ۱۳

منبع

الهام گرفته شده از کتاب: اوسپنسکی، و. (۱۳۶۱). برخی کاربردهای مکانیک در ریاضیات. ترجمهٔ دکتر کاظم ابهری. نشر گستره. تهران.

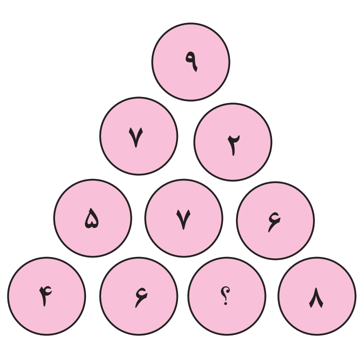
با توجه به الگوهای عددی که در نمودارهای زیر پیدا می‌کنید، عددی را که باید در خانهٔ با علامت سؤال قرار گیرد، مشخص کنید. تلاش خود را بکنید و اگر موفق نشدید، پاسخ و راه‌حل را در صفحهٔ ۴۸ ببینید.



(الف)

			۱۴	
	۲۲			
			۳۴	
۴۱				
		۵۳		؟

(ب)



(ج)